Vidal Agniel → site Web

Chapitre 0
Logique et raisonnement

Table des matières

Vidal AGNIEL

Notations usuelles en logique mathématique

$\forall$ "pour tout"
$\exists$ "il existe"
$\in$ "appartenant à"
$\subset$ "inclus dans"

$\Rightarrow$ "implique"
$\Leftrightarrow$ "équivalent à"
$|$ "tel que"
, "on a"/"avec"/"tel que" (selon le contexte)

1 Variables, quantificateurs, propositions

Les objets mathématiques que nous utilisons se conçoivent dans trois grandes familles : les **ensembles** ($\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{R}^2, \mathbb{R}[X], M_n(\mathbb{R}), \ldots$), les **nombres et éléments** d'un ensemble (entiers, rationnels, réels, vecteurs, matrices, ...), les **fonctions** (dérivées, suites, polynômes, séries, ...).

Pour désigner des objets, on utilise des **variables**. Il s'agit de lettres (x, y, a, n, α, β, ...) qui ont parfois des indices ou des écritures différentes (x_1, x_2, $x_{2,1}$, x', $\hat{x}$, $\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$, X, ...). Une variable représente un objet mathématique avec certaines propriétés. C'est parfois un objet qui est unique et clair ($x = 5$) ou bien un objet qui peut avoir plusieurs valeurs différentes ($x \in \mathbb{N}$ est un entier naturel, mais on ne sait pas lequel).

Pour mettre en relation les objets mathématiques ainsi que des variables, on utilise des **quantiticateurs**.
Un quantificateur est un symbole avec un sens logique précis.
Les plus utilisés sont : $\forall$, $\exists$, $\exists!$, $\in$, $\Rightarrow \Leftrightarrow$, $\subset$.
Chaque quantificateur a une syntaxe et une utilisation précise, que nous verrons par la suite.

Certains mots en français sont aussi utilisés pour désigner un quantificateur, un ensemble, une fonction, ou une condition particulière : "pour tout", "on a", "implique", "si et seulement si", "si", "alors", "est pair", "est strictement croissante",...

Une **phrase mathématique** est une suite de quantificateurs, de variables, d'objets mathématiques, et de mots, qui est syntaxiquement correcte et qui a un sens.

Définition 1
Une **proposition**, ou **phrase mathématique**, est une suite de quantificateurs, de variables, et d'objets mathématiques, qui est syntaxiquement correcte, et qui a un sens.
Les mots "lemme", "théorème", "corollaire" sont des synonymes de "proposition".

Exemple 2 —

1. P : "$\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) \geq x$." *est une proposition.*
2. Q : "$\forall x \in \mathbb{R}$, *on a* $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1, 1\}$." *est une proposition.*
3. *Pour* $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$: "n *est pair si et seulement si* n^2 *est pair." est une proposition. Cette proposition* $P(n)$ *dépend de l'entier* n, *qui est défini avant la phrase mathématique.*
   C'est entre autres le cas des hypothèses de récurrence.
4. $R : \forall x, x + 1 = 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$." *n'est pas une proposition (problème de syntaxe, qui est* x *? un réel, un entier, une fonction, un ensemble ?).*
5. R' : "$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$." *n'est pas une proposition (problème de syntaxe, qui est* f *?).*
6. S : "$\forall x \in \mathbb{R}, \ln(x) \leq 1 + x$." *n'est pas une proposition (problème de sens, pour* $x \leq 0$ *le nombre* $\ln(x)$ *n'a pas de sens).*
7. "$\forall x \in \mathbb{R}, x = 2x + 1 \Rightarrow x = 1$." *est une proposition. Par contre, cette proposition est fausse.*
8. "$\exists x \in \mathbb{R}$ *tel que* $x + 1 = x + 2$." *est une proposition. Par contre, cette proposition est fausse.*

Axiome 3 (**Principe du tiers exclus**)
Soit P une proposition mathématique. La proposition P **est soit vraie, soit fausse**.

Souvent, une proposition dépend d'une ou plusieurs variables qui sont définies en amont (un entier n, un réel x, une fonction f,...). En général, on note $P(x)$ une proposition qui dépend de la variable est x, afin d'indiquer clairement cette dépendance.
La **valeur de vérité** de la proposition (vraie ou fausse) peut alors dépendre de ces variables.

Exemple 4 — *Soient* $n, m \in \mathbb{N}$. *On pose* $P(n, m)$: "$\exists k \in \mathbb{N}$ *tel que* $n \times m = 2^k$."
La proposition $P(n, m)$ *sera vraie ou fausse en fonction des valeurs de* n *et de* m.
On peut ici démontrer (Ch.6) que $P(n, m)$ *est vraie si et seulement si* n *et* m *sont des puissances de 2.*
Donc, la proposition "$P(n, m)$ *est vraie si et seulement si* $\exists r, s \in \mathbb{N}$ *tels que* $n = 2^r$, $m = 2^s$." *est vraie.*

Remarque 5 — *Une proposition* P *est aussi un objet mathématique. On peut donc l'utiliser comme élément pour créer de nouvelles propositions, au même titre que les nombres, les fonctions, et les ensembles. Pour une proposition* P *on s'intéresse à sa valeur de vérité (vrai ou faux), éventuellement en fonction d'autres objets mathématiques.*
Soit $y \in \mathbb{R}$. *On pose* P : "$y = 1$." *et* P' : "$y^2 = 1$.".
On peut alors écrire Q : "*Si* P' *est vraie, alors* P *est vraie.". Q est une proposition (qui est fausse).*

La manipulation de propositions et de leurs valeurs de vérité est au coeur de beaucoup de résultats mathématiques.

1.1 Quelques règles de calcul pour les propositions

DÉFINITION 6 (**"Et","ou","non"**)
Soient P et Q des propositions.
On définit $non(P)$ comme la proposition qui est vraie lorsque P est fausse.
On définit $P\,et\,Q$ comme la proposition qui est vraie lorsque P et Q sont vraies simultanément.
On définit $P\,ou\,Q$ comme la proposition qui est vraie lorsque P ou Q est vraie (l'un, l'autre, ou les deux).

DÉFINITION 7
Soient P et Q des propositions.
On dit que P et Q sont identiques, noté $P \equiv Q$, si P et Q ont toujours la même valeur de vérité.

PROPOSITION 8
Soient P, Q et R des propositions. On a :
- $non(non\,P) \equiv P$,
- $non(P\ et\ Q) \equiv (non\,P)\ ou\ (non\,Q)$,
- $non(P\ ou\ Q) \equiv (non\,P)\ et\ (non\,Q)$,
- $P\ et\ (Q\ ou\ R) \equiv (P\ et\ Q)\ ou\ (P\ et\ R)$,
- $P\ ou\ (Q\ et\ R) \equiv (P\ ou\ Q)\ et\ (P\ ou\ R)$,
- La proposition « $P\ et\ (non\,P)$ » est toujours fausse,
- La proposition « $P\ ou\ (non\,P)$ » est toujours vraie : soit P est vraie, soit $non(P)$ est vraie.

Preuve —Une façon de démontrer toutes ces propriétés se fait à l'aide de tables de vérité, c'est-à-dire en décrivant toutes les situations possibles pour P et pour Q. Donnons un exemple :

P	Q	P et Q	$non(P$ et $Q)$	$non(P)$	$non(Q)$	$non(P)$ ou $non(Q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	V

Dans tous les cas possibles, $non(P\ et\ Q)$ et $non(P)\ ou\ non(Q)$ ont la même valeur de vérité, donc $non(P\ et\ Q) \equiv non(P)\ ou\ non(Q)$. □

1.2 Implication

DÉFINITION 9
Soient P et Q des propositions. On définit « $P \Rightarrow Q$ » par $non(P)\,ou\,Q$. On a "$P \Rightarrow Q$" vraie si P vraie implique Q vraie, ou bien si P est fausse (auquel cas Q peut être vraie ou fausse).

DÉFINITION 10
Lorsque « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, on dit que
- P est une **condition suffisante** pour Q,
- Q est une **condition nécessaire** pour P.

Autrement dit,
- il suffit que P soit vraie pour savoir que Q est vraie,
- il faut que Q soit vraie pour que P soit vraie.

DÉFINITION 11
- *La proposition « $Q \Rightarrow P$ » s'appelle la* ***réciproque*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*
- *La proposition « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ » s'appelle la* ***contraposée*** *de l'implication « $P \Rightarrow Q$ ».*

PROPOSITION 12 (**Implication et contraposée**)
On a $P \Rightarrow Q \equiv (non\,Q) \Rightarrow (non P)$.

EXEMPLE 13 — *Soit $x \in \mathbb{R}$. L'implication $x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 0$ est vraie.*
L'implication $x \geq 0 \Rightarrow \exp(x) \geq 2$ est fausse (pour $x = 0$ on a $x \geq 0$ mais $\exp(x) = 1 < 2$).

1.3 Équivalence

DÉFINITION 14 (Equivalence)
Soient P et Q des propositions.
La proposition « $P \Leftrightarrow Q$ » (P **si et seulement si** Q) est la proposition qui est :

- vraie lorsque les propositions P et Q sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses,
- fausse dans les autres cas.

PROPOSITION 15 (**Equivalence et double-implication**)
On a $P \Leftrightarrow Q \equiv (P \Rightarrow Q)$ *et* $(Q \Rightarrow P)$.

EXEMPLE 16 — *Soient* $x, y \in \mathbb{R}$. *On a* $x > y \Leftrightarrow \exp(x-y) > 1$.

1.4 Quantificateurs

Soit E un ensemble. Soit $P(x)$ une proposition dépendant de la variable x, avec $x \in E$.

DÉFINITION 17 (**Quantificateur "pour tout"**)
On définit le quantificateur $\forall$ (« pour tout » ou « quel que soit ») par la proposition « $\forall x \in E,\ P(x)$ » qui est :

- vraie lorsque pour tous les éléments x appartenant à E, $P(x)$ est vraie,
- fausse sinon (c'est-à-dire si $P(x)$ est fausse pour **au moins** un élément x de E).

DÉFINITION 18 (**Quantificateur "il existe"**)
On définit le quantificateur $\exists$ (« il existe ») par la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » (« il existe … tel que ») qui est :

- vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour au moins un élément x de E,
- fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.

Après ces deux quantificateurs, il faut toujours préciser l'ensemble où on prend notre variable :
« $\forall x,\ x(1-x) \geq 0$ » n'est pas une proposition correcte (pour tout x dans quoi ?).
« $\forall x \in \mathbb{R},\ x(1-x) \geq 0$ » est fausse, mais « $\forall x \in [0,1],\ x(1-x) \geq 0$ » est vraie.

De la même façon, « $\exists x$ tel que $x^2 = 2$ » n'est pas une proposition correcte.
« $\exists x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 = 2$ » est vraie, mais « $\exists x \in \mathbb{N}$ tel que $x^2 = 2$ » est fausse.

Attention ! Les symboles « $\forall$ » et « $\exists$ » ne sont pas des **abréviations**, on les utilise **uniquement dans des phrases mathématiques**, et jamais dans des phrases en français.

Le quantificateur $\exists$ est le contraire du quantificateur $\forall$. Plus précisément, on a :

PROPOSITION 19 (**Négation et quantificateurs**)

- $non(\forall x \in E,\ P(x)) \equiv \exists x \in E,\ non(P(x))$,
- $non(\exists x \in E,\ P(x)) \equiv \forall x \in E,\ non(P(x))$.

Le contraire de "Pour tout x dans E on a $P(x)$ vraie." est "Il existe x dans E tel que $P(x)$ est fausse."
Le contraire de "Il existe x dans E tel que $P(x)$ vraie." est "Pour tout x dans E, $P(x)$ est fausse."

REMARQUE 20 (Quantificateurs et ordre) —
Attention ! *Chager la position des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ change totalement le sens de la proposition. On peut en général échanger deux $\forall$ qui se suivent ou deux $\exists$ qui se suivent, mais* ***on ne peut pas échanger un $\forall$ et un $\exists$.***

EXEMPLE 21 — *On a* $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+yx+y^2) \equiv \forall y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+yx+y^2)$.
La proposition "$\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $3y - 4 = x$" est vraie.
Mais la proposition "$\exists y \in \mathbb{R}$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $3y - 4 = x$" est fausse.
Ces deux propositions ne sont donc pas équivalentes.

DÉFINITION 22 (**Quantificateur "il existe un unique"**)
On définit le quantificateur $\exists!$ (« il existe un unique ») par la proposition « $\exists! x \in E,\ P(x)$ » (« il existe un unique … tel que ») qui est :

- vraie lorsque $P(x)$ est vraie pour exactement un élément x de E,
- fausse lorsque $P(x)$ est fausse pour tous les éléments x de E.

REMARQUE 23 (Différence entre $\exists$ et $\exists!$) —
• *Si la proposition "$\exists x \in E$ tel que $P(x)$." est vraie, alors on peut prendre* ***un*** *élément x dans E tel que $P(x)$ est vraie.* ***On ne sait pas si*** *cet élément x* ***est unique***, *donc on ne peut pas le nommer plus précisément (par exemple,* ***une*** *solution de $x^3 - 3x + 1 = 0$).*
• *Si la proposition "$\exists! x \in E$ tel que $P(x)$." est vraie, alors on peut prendre* ***l'élément*** *x dans E tel que $P(x)$ est vraie. Cet élément est unique, ce qui permet de lui donner un nom particulier (par exemple,* ***la*** *limite de la suite $(\frac{2^n}{n})_n$).*

2 Raisonnement mathématique, démonstration

Un **raisonnement mathématique** est une suite de phrases mathématiques qui, à partir d'une proposition P vraie, permet de montrer qu'une autre proposition Q est vraie. Ces phrases mathématiques sont uniquement basées sur des principes logiques.
Une **démonstration** (ou **preuve**) est un raisonnement mathématique qui vérifie qu'une proposition P est vraie.
Une fois la démonstration écrite, tout lecteur est ainsi en mesure d'être convaincu que la proposition P est vraie, car les arguments utilisés sont uniquement des enchaînements de vérités absolues.
Dans une démonstration, la rédaction est purement objective, il n'y a rien de subjectif.

DÉFINITION 24 (**Vocabulaire**)
Une proposition s'énonce souvent sous la forme « Si A alors B ».

- La proposition A regroupe les **hypothèses.**
- La proposition B regroupe les **conclusions**.

DÉFINITION 25
Pour P une proposition, démontrer que P est vraie revient à créer une preuve de la proposition P.
Les mots "montrer", "prouver", "en déduire" sont des synonymes de "démontrer".

DÉFINITION 26 (**Abus de notation pour $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$**)
Dans tout ce cours de mathématiques, lorsque l'on écrit une proposition mathématique, on sous-entend qu'elle est vraie.
Dans tous les prochains chapitres, losque l'on écrira "$A \Rightarrow B$", on se placera toujours dans la situation où l'hypothèse A est vraie.
On fera ainsi l'amalgamme entre "Si A alors B." et "$A \Rightarrow B$".
De même, pour "$A \Leftrightarrow B$" (ou "A ssi B"), on se placera toujours dans la situation où l'hypothèse A est vraie pour montrer B, puis celle où B est vraie pour montrer A.
Ce petit abus de notation permet d'utiliser les symboles $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ comme connecteurs logiques dans les preuves (par exemple, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 + 2x \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 1$).

2.1 Utilisation des raisonnements logiques

Les raisonnements logiques que l'on utilise servent à :

- Prouver que deux nombres, deux fonctions, deux ensembles sont égaux.
- Prouver une inégalité entre deux nombres, deux fonctions, une inclusion entre deux ensembles.
- Donner une autre expression pour un nombre, une fonction, un ensemble ("calculer", "simplifier", "résoudre")
- Prouver qu'une proposition commençant par un $\forall$ est vraie.
- Prouver qu'une proposition commençant par un $\exists$ est vraie.
- Prouver qu'une proposition commençant par un $\exists!$ est vraie.
- Prouver qu'une proposition est fausse.
- Prouver qu'une proposition en implique une autre.
- Prouver que deux propositions sont équivalentes.

Pour ces raisonnements, on retrouve des éléments de rédaction communs.

2.2 Eléments de rédaction

Quand on dit « **Supposons** P », on part de l'hypothèse que P est vraie.

Pour bien rédiger en mathématiques, on doit respecter certaines règles.

- On doit introduire **tous** les nouveaux objets.
  - Pour introduire une variable x qui représente un **élément quelconque** d'un ensemble E, on peut écrire « *Soit* $x \in E$ » ou « *Soit* x *un élément de* E ».
  - Pour donner un nom, par exemple M, à une quantité connue ou à un objet que l'on va souvent utiliser, on peut écrire :
    « ***Posons*** $M = \dots$ » ou « ***Notons*** $M = \dots$ » (ou « On pose $M = \dots$ », « On note $M = \dots$ »).

    Par exemple, « *Posons* $M = \dfrac{\sqrt{2}+3}{4}$ ».
- On doit mettre des liens logiques entre les arguments, comme par exemple :
  - « **Donc** » . « **D'où** », « **Ainsi** » ,
  - « **On en déduit que** »,
  - « **Or** » (permet d'ajouter un argument),
  - « **Finalement** » (pour une conlusion à la fin du raisonnement), ...
- On peut annoncer ce que l'on veut faire. Cela aide a bien clarifier l'objectif.
  « ***Montrons que*** ... », « On veut montrer que ... ».

REMARQUE 27 (**Utiliser une implication**) —
Beaucoup de résultats du cours sont de la forme $A \Rightarrow B$ ou « Si A alors B ».
Pour invoquer un tel résultat dans une preuve, il faut d'abord commencer par vérifier que A (l'hypothèse) est vraie. On écrit :
« On a A. D'après le théorème ..., on sait que A implique B. Donc on a B »

EXEMPLE 28 — *Soient $A = (1,2), B = (2,1), C = (2,3)$.*
On a $\vec{AB} = (1,-1)$ et $\vec{AC} = (1,1)$. Ainsi, on a $\langle \vec{AB}, \vec{AC} \rangle = 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0$.
Les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux, donc le triangle ABC est rectangle en A.
Ainsi, d'après le théorème de Pythagore, on a $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Pour chaque type de proposition à prouver, il existe des structures de raisonnement qui peuvent être très efficaces pour obtenir une preuve.
Ces structures permettent de relier les hypothèses au résultat par des raisonnements plus simples (donc plus faciles et souvent plus rapides à trouver et à rédiger).

3 RAISONNEMENTS CLASSIQUES

3.1 Raisonnement direct

DÉFINITION 29
Un **raisonnement direct** est un raisonnement qui part des hypothèses et arrive au résultat sans situation particulière.

REMARQUE 30 (**Preuve d'une proposition commençant par un** $\forall$) — *Pour la proposition « $\forall x \in E, P(x)$ », il faut poser x un élément quelconque de E et on montre que $P(x)$ est vraie. Rédaction :*
Soit *$x \in E$.*
⋮
Donc $P(x)$ est vraie.
Ainsi, pour tout $x \in E$, on a $P(x)$.

EXEMPLE 31 — *Démontrer :"Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) \geq 1 + x$."*
Preuve — *Soit $x \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = \exp(x) - (1+x)$.*
La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a $f'(x) = \exp(x) - 1$.

Ainsi, on a $f'(x) \geq 0$ ssi $\exp(x) - 1 \geq 0$ ssi $\exp(x) \geq 1$ ssi $x \geq \ln(1) = 0$.
Donc, f' est positive sur $[0, +\infty[$ et négative sur $]-\infty, 0]$.
Ainsi, f est décroissante sur $]-\infty, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.
Cela implique que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $f(y) \geq f(0)$.
On a donc $\exp(x) - (1 + x) = f(x) \geq f(0) = 1 - (1 + 0) = 0$.
D'où $\exp(x) \geq 1 + x$. □

EXEMPLE 32 (Preuve directe d'une implication) —
Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n est pair alors n^2 est pair.
Il s'agit de la proposition « $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n est pair $\Rightarrow n^2$ est pair) ».
***Preuve** — Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que n est pair.*
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. On a donc $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$.
Comme $2k^2 \in \mathbb{Z}$, on en déduit que n^2 est pair. □

REMARQUE 33 (**Preuve d'une proposition commençant par un $\exists$**) —
On veut montrer que la proposition « $\exists x \in E,\ P(x)$ » est vraie.
En général, on cherche et on trouve explicitement un élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ est vraie.

EXEMPLE 34 — *Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$. Démontrer : "$\mathbb{R}_+ \subset Im(f)$".*
***Preuve** — On a $Im(f) = \{y \in \mathbb{R}$ t.q. $\exists x \in \mathbb{R}$ t.q. $y = x^2\}$.*
Soit $y \in \mathbb{R}_+$. Soit $n = \lfloor y \rfloor + 1$. Alors on a $n \in \mathbb{N}$ et $n > y \geq 0$.
On a donc $n \geq 1$. Ainsi, on a $n^2 \geq n > y \geq 0 = 0^2$.
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc sur $[0, n]$, et le nombre y est compris entre $f(0)$ et $f(n)$.
Donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x) = x^2$.
Cela étant vrai pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, on obtient que $\mathbb{R}_+ \subset Im(f)$. □

EXEMPLE 35 (Preuve directe d'une équivalence) — *Soient $x, y \in \mathbb{R}$.*
On a $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{array}\right.$ ssi $x = 1$ et $y = -1$.
***Preuve** — On a $\left\{\begin{array}{rcl} 2x + y & = & 1 \\ x - y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3y & = & 1 - 4 \\ x - y & = & 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -1 \\ x & = & 2 + y \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} y & = & -1 \\ x & = & 1 \end{array}\right.$.* □

3.2 Raisonnement par double-implication

Pour montrer que « $P \Leftrightarrow Q$ » est vraie, on procède souvent en deux étapes, qui sont **deux implications**.
On montre d'une part que « $P \Rightarrow Q$ » est vraie, puis **réciproquement** que « $P \Leftarrow Q$ » est vraie.
En général, l'une des implications est bien plus facile que l'autre.

EXEMPLE 36 —
Démontrons que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ si et seulement si $a = 0$ ou $b = 0$.
Il s'agit de la proposition « $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2$, $\big((a + b)^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow (a = 0$ ou $b = 0)\big)$. »
***Preuve** — Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Procédons par double-implication.*

- ▷ *Supposons que $(a + b)^2 = a^2 + b^2$. On sait que $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ et, par hypothèse, $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.*
  On a donc $a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$, ce qui donne $2ab = 0$, c'est-à-dire $ab = 0$.
  Donc $a = 0$ ou $b = 0$.
- ◁ ***Réciproquement**, supposons que $a = 0$ ou $b = 0$. Si $a = 0$ ou $b = 0$, on a dans les deux cas $ab = 0$.*
  On obtient donc $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = a^2 + b^2$.

□

3.3 Raisonnement par double-inclusion

Soient E, F deux ensembles. Pour montrer que $E = F$, on procède souvent en **deux étapes**.
On montre d'une part que $E \subset F$, puis **réciproquement** que $F \subset F$.
Pour cela, on montre "$\forall x \in E$, on a $x \in F$." (équivalent à $E \subset F$), et "$\forall y \in F$, on a $y \in E$.".
En général, l'une des inclusions est plus facile que l'autre.

EXEMPLE 37 — *Soient $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 2 \leq 2\}$ et $F = [-1, 0]$.*
Démontrons que $E = F$.
***Preuve** — Procédons par **double inclusion**.*
- *Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $x^2 + x + 2 \leq 2$.*

Alors, on a $x^2 + x \leq 0$, donc $x \leq -x^2$. Comme $-x^2 \leq 0$ on a donc $x \leq 0$.
De plus, on a $x^2 + x = x(x + 1)$. Avec $x(x + 1) \leq 0$ et $x \leq 0$ on obtient que $x + 1 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -1$.
Finalement, on obtient $-1 \leq x \leq 0$, c'est-à-dire que $x \in [-1, 0]$.

Ainsi, on a $E \subset F$.
• *Réciproquement, soit $y \in [-1, 0]$.*
Alors on a $y \leq 0$ et $y + 1 \geq 0$, donc $y(y+1) \leq 0$, donc $y^2 + y + 2 = y(y+1) + 2 \leq 2$.
Ainsi, on a $y \in E$.
Donc, on a $F \subset E$.
Donc, on a $E = F$. □

3.4 Raisonnement par double-inégalité

Ce raisonnement est analogue à la double-implication et à la double-inclusion. Il sert à prouver que deux nombres réels x et y sont égaux.
En effet, on a $x = y$ ssi ($x \leq y$ et $y \leq x$).
Ce raisonnement est moins fréquent en première année de CPGE, mais on le retrouve plus souvent par la suite, notamment chez les espaces vectoriels normés.

EXEMPLE 38 — *Montrer que $\sup_{x,y\in[0,1]}(\frac{1}{x+y+1}) = 1$.*
Preuve — *On procède par double-implication.*
• *Pour $x = 0$ et $y = 0$ on a $\frac{1}{x+y+1} = \frac{1}{0+0+1} = 1$.*
Donc, $\sup_{x,y\in[0,1]}(\frac{1}{x+y+1}) \geq 1$.
• *Réciproquement, soient $x, y \in [0, 1]$.*
On a $x + y + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1 > 0$, donc $\frac{1}{x+y+1} \leq \frac{1}{1} = 1$.
Donc, on a $\sup_{x,y\in[0,1]}(\frac{1}{x+y+1}) \leq 1$.
Donc, on a bien $\sup_{x,y\in[0,1]}(\frac{1}{x+y+1}) = 1$. □

3.5 Raisonnement par disjonction de cas

Pour démontrer "$\forall x \in E$, on a $P(x)$.", il se peut que l'expression de $P(x)$ soit difficile à manipuler dans le cas général.
On peut alors **découper l'ensemble E en plusieurs sous-ensembles** $E_1, \ldots, E_n$, et vérifier que pour chaque entier i entre 1 et n et pour chaque $x \in E_i$, la proposition $P(x)$ est vraie.

EXEMPLE 39 — *Démontrons que la fonction $f : x \mapsto x|x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $x \mapsto 2|x|$.*
Preuve — *Soit $x \in \mathbb{R}$. Procédons par disjonction de cas :*
• *(Cas positif) Si $x \in [0, +\infty[$, on a $f(x) = x.x = x^2$.*
La fonction $x \mapsto x^2$ est dérivable sur $[0, +\infty[$, et sa dérivée est $x \mapsto 2x$.
Ainsi, pour tout $y \in]0, +\infty[$, on a $f'(y) = 2y$.
Comme on a $y < 0$, on a $f'(y) = 2y = 2|y|$.
• *(Cas négatif) Si $x \in]-infty, 0]$, on a $f(x) = x.(-x) = -x^2$.*
La fonction $x \mapsto -x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}_-$, et sa dérivée est $x \mapsto -2x$.
Ainsi, pour tout $y \in]-infty, 0[$, on a $f'(y) = -2y$.
Comme on a $y < 0$, on a $f'(y) = -2y = 2|y|$.
• *(Cas nul) Soit $h \neq 0$. Le taux de variation de la fonction f en 0 vaut $\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{h|h|-0}{h} = |h|$.*
Or, on a $|h| \to_{h\to 0} 0$.
Ainsi, le taux de variation de f en 0 possède une limite finie quand $h \to 0$, donc f est dérivable en 0, et sa dérivée vaut $f'(0) = 0$.
On vérifie enfin que $2|0| = 0 = f'(0)$.
Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $f'(y) = 2|y|$. □

EXEMPLE 40 — *Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.*
Preuve — *Il faut pour cela montrer que $n(n+1)$ est divisible par 2. Procédons par disjonction de cas.*
• *Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.*
On a donc $n(n+1) = 2k(n+1)$. Comme $k(n+1) \in \mathbb{N}$, on a donc que 2 divise $n(n+1)$, donc que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
• *Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.*
On a donc $n(n+1) = (2k+1)(2k+2) = 2(2k+1)(k+1)$. Comme $(2k+1)(k+1) \in \mathbb{N}$, on a donc que 2 divise $n(n+1)$, donc que $\frac{n(n+1)}{2}$ est un entier naturel.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$. □

REMARQUE 41 — *La disjonction de cas est* **de même utile dans les calculs/simplifications/résolutions.**
Très souvent, il faut faire une disjonction de cas **pour éviter de diviser par** *0.*

EXEMPLE 42 — *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a \in \mathbb{R}$. Simplifier $u_n = \sum_{k=2}^{n} a^k$.*

Preuve — *On a $u_n = \sum_{k=2}^{n} a^k = \sum_{k=2}^{n} a^k + a + 1 - a - 1 = \sum_{k=0}^{n} a^k - a - 1$.*

Procédons par disjonction de cas, en fonction de a :

- *Si $a = 1$, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k - a - 1 = (n+1) - 1 - 1 = n - 1$.*
- *Si $a \neq 1$, on a $u_n = \sum_{k=0}^{n} a^k - a - 1 = \frac{1-a^n}{1-a} - (1+a) = \frac{1-a^{n+1}-(1-a)(1+a)}{1-a} = \frac{a^2-a^{n+1}}{1-a}$.* □

EXEMPLE 43 — *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation $x = ax + b$ en fonction de x.*

Preuve — *On a $x = ax + b \Leftrightarrow x(1-a) = b$. Procédons par disjonction de cas.*

- *Si $1 - a = 0$, on a $x(1-a) = b \Leftrightarrow 0 = b$.*
  Alors, si $b \neq 0$, l'équation n'a pas de solutions.
  Si $b = 0$, on a alors $x(1-a) = b \Leftrightarrow 0 = 0$, donc tous les nombres réels x sont solution (l'équation $0 = 0$ est toujours vraie).
- *Si $1 - a \neq 0$, on a $x(1-a) = b \Leftrightarrow x = \frac{b}{1-a}$.*

Ainsi, cette équation possède une seule solution si $a \neq 1$, qui est $\frac{b}{1-a}$, aucune solution si $a = 1$ et $b \neq 0$, et une infinité de solutions si $a = 1$ et $b = 0$. □

3.6 Preuve d'une unicité

Pour une proposition de la forme "$\exists! x \in E$ tel que $P(x)$.", on traite en général l'existence dans un premier temps, et l'unicité dans un second temps.

Pour prouver qu'il n'existe qu'un seul élément x pour lequel $P(x)$ est vraie, **on prend deux éléments** $x, y \in E$ vérifiant $P(x)$ et **on vérifie que** $x = y$.

Si tous les éléments de E pour lesquels P est vraie sont égaux, cela veut dire qu'il n'y a en réalité qu'un seul élément.

EXEMPLE 44 — *Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$.*
Démontrer : "$\exists!(g,h) \in Fonct([-1,1], \mathbb{R})^2$ telles que g est paire, h est impaire, et $f = g + h$."

Preuve — ***Existence :***

Pour $x \in [-1,1]$, on pose $g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$ et $h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$.

Alors, on a $g(-x) = \frac{f(-x)+f(x)}{2} = g(x)$, $h(-x) = \frac{f(-x)-f(x)}{2} = -h(x)$.

Donc g est une fonction paire et h est une fonction impaire.

On a de plus $g(x) + h(x) = \frac{f(x)+f(-x)+f(x)-f(-x)}{2} = f(x)$, donc $f = g + h$.

Unicité :

Soient $G, H : [-1,1] \to \mathbb{R}$ deux autres fonctions avec G paire, H impaire, et $f = G + H$.

Montrons que $G = g$ et $H = h$.

On a $g + h = f = G + H$, donc $g - G = H - h$.

Comme g et G sont paires, la fonction $g - G$ est paire.

Comme h et H sont impaires, la fonction $H - h$ est impaire.

Donc, la fonction $g - G$ est paire et impaire.

Pour tout $x \in [-1,1]$, on a donc $g(-x) - G(-x) = g(x) - G(x)$ et $g(-x) - G(-x) = -g(x) + G(x)$.

Cela donne $2g(x) - 2G(x) = 0$, donc $g(x) - G(x) = 0$.

On a donc $g - G = 0$, donc $g - G$.

Ainsi, on a $0 = H - h$, donc $H = h$.

La paire (g,h) est donc bien unique. □

3.7 Preuve par contre-exemple

REMARQUE 45 (**Utilisation d'un contre-exemple**) — *Pour montrer que la proposition "$\forall x \in E$, $P(x)$." est fausse, on peut montrer que son contraire, "$\exists x \in E$ tel que $P(x)$ est fausse.", est vrai.*
Ce contraire est une proposition qui commence par un $\exists$.
Ainsi, il suffit de trouver un élément $x_0 \in E$ tel que $P(x_0)$ est fausse pour obtenir le résultat.
On dit que x_0 ***est un contre-exemple*** *pour la proposition P.*

EXEMPLE 46 — *Montrer que P : "$\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $(a+b)^2 = a^2 + b^2$." est fausse.*

Preuve *Exhibons un contre-exemple.*

On pose $a = 1$ et $b = 1$. Alors on a $(a+b)^2 = (1+1)^2 = 4$ et $a^2 + b^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Comme $2 \neq 4$, on a donc $(a+b)^2 \neq a^2 + b^2$.

Donc, la proposition P est fausse. □

EXEMPLE 47 — *Démontrons que la proposition P :« $\forall n \in \mathbb{N}$, $2^n > n^2$ » est fausse.*

Preuve —*Pour $n = 3$, on a $8 = 2^3 < 3^2 = 9$. Il existe donc un entier naturel n tel que $2^n \leq n^2$.*

Ainsi, la proposition P est fausse. □

3.8 Raisonnement par récurrence forte

Le raisonnement par récurrence étudié au lycée est aussi appelé récurrence simple. Il existe une version généralisée de ce raisonnement, qui est celle que nous utiliserons.

Soit $P(n)$ une proposition dépendant d'une variable $n \in \mathbb{N}$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$.
On veut démontrer que pour tout $n \geq n_0$, la proposition $P(n)$ est vraie ("$\forall n \geq n_0,\ P(n)$.").

PROPOSITION 48 (**Principe de récurrence forte**)
Si $P(n_0)$ est vraie (**initialisation**) ET si pour tout $n \geq n_0$, on a
« $(P(n_0)$ et $P(n_0+1)$ et … et $P(n)) \Rightarrow P(n+1)$ » (**hérédité forte**), alors, pour tout $n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

On rédige un raisonnement par récurrence forte de la façon suivante :

Démontrons le résultat par récurrence forte sur n.
Notons, pour tout entier $n \geq n_0$, HR_n : "…… "

- **Initialisation :** *Soit $n = n_0$ (La vérification est souvent facile. Pour une récurrence forte on peut avoir à vérifier les deux premières hypothèses HR_{n_0} et HR_{n_0+1})*

  ⋮

  Donc HR_{n_0} est vraie.
- **Hérédité :** *Soit $n \geq n_0$. Supposons que $HR_{n_0}, HR_{n_0+1}, \dots, HR_n$ sont vraies. Montrons que HR_{n+1} est vraie. Dans cette étape, on relie la propriété HR_{n+1} à $HR_n, \dots, HR_{n_0}$ grâce à une relation de récurrence.*

  ⋮

  Donc HR_{n+1} est vraie.

Cela termine la récurrence.

REMARQUE 49 — *En général, le nombre de départ n_0 vaut 0, 1 ou 2.*

REMARQUE 50 — ***Attention :** Il est très important de démarrer l'hérédité au même entier n_0 que l'initialisation. Si on montre que HR_0 est vraie et que $HR_n \Longrightarrow HR_{n+1}$ pour tout $n \geq 1$, cela ne montre pas que HR_n est vraie pour tout $n \geq 0$, car on ne sait pas si HR_1 est vraie.*

EXEMPLE 51 — *Démontrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Preuve — *Démontrons le résultat par récurrence forte sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $HR(n)$:« $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ ».*

- ***Initialisation** : Pour $n = 1$, on a $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.*
  Donc $HR(1)$ est vraie.
- ***Hérédité** : Soit $n \geq 1$. Supposons que $HR(1), \dots, HR(n)$ sont vraies. Montrons que $HR(n+1)$ est vraie.*

  On a $\sum_{k=1}^{n+1} k = (\sum_{k=1}^{n} k) + (n+1)$.
  Donc d'après $HR(n)$, on a

  $$\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

  Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

Cela termine la récurrence.

□

Dans cet exemple, il suffisait d'utiliser $HR(n)$ pour montrer que $HR(n+1)$ est vraie.
Parfois, on a aussi besoin de $HR(n-1)$, $HR(n-2)$, …

REMARQUE 52 — *En général, **le point central** d'une preuve par récurrence **est l'hérédité**.*
Il faut avoir une relation entre $HR(n+1)$ et les propriétés précédentes pour traiter l'hérédité.
*Une telle relation est appelée **relation de récurrence**. Elle est indispensable à une preuve par récurrence.*
Si vous identifiez une relation de récurrence, il y a de grandes chances que le résultat soit démontrable par récurrence. Si vous n'en identifiez pas, soit votre récurrence n'était pas nécessaire (preuve directe), soit

vous n'arriverez pas à prouver l'hérédité.
Pour une suite $(u_n)_n$ voici des exemples de relations de récurrence : $u_{n+1} = u_n + 2$, $u_{n+1} = u_n \times 2$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_{n+1} = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$, $u_{n+1} = u_n + n$, $u_{n+1} = \sqrt{u_{n-2}}$.

EXEMPLE 53 — *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_1 = 3$, et pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n = 1 + 2^n$.*
Preuve — Démontrons le résultat par récurrence forte sur n. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $P(n)$: « $u_n = 1 + 2^n$ ».

- ***Initialisation** : On a $u_0 = 2 = 1 + 2^0$ et $u_1 = 3 = 1 + 2^1$, donc $P(0)$ et $P(1)$ sont vraies.*
- ***Hérédité** : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Supposons que $P(0), \ldots, P(n)$ sont vraies. Montrons que $P(n+1)$ est vraie.*
  On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$, donc on a $u_{n+1} = 3u_n - 2u_{n-1}$. Comme $n \geq 2$, on a $n - 1 \geq 1$, donc u_{n-1} existe bien. En utilisant $P(n)$ et $P(n-1)$, on obtient :
  $$u_{n+1} = 3 \times (1 + 2^n) - 2 \times (1 + 2^{n-1}) = 3 + 3 \times 2^n - 2 - 2^n = 1 + 2 \times 2^n = 1 + 2^{n+1}.$$
  Donc $P(n+1)$ est vraie.

Cela termine la récurrence. □

REMARQUE 54 — *Dans ce dernier exemple, il a fallu démontrer $P(0)$ et $P(1)$ dans l'initialisation avant de commencer l'hérédité. En effet, la relation de récurrence que l'on possède relie u_{n+2} aux deux termes précédents, donc $P(n+2)$ à $P(n+1)$ et $P(n)$ (ou $P(n+1)$ à $P(n)$ et $P(n-1)$). La première proposition que l'on obtiendra par hérédité sera ainsi $P(2)$, ce qui fait que $P(0)$ **et** $P(1)$ doivent faire partie de l'initialisation.*
A nouveau, il faut faire attention aux indices qui apparaissent.

3.9 Raisonnement par contraposée

Démontrer que « $P \Rightarrow Q$ » est vraie revient à démontrer que « $non(Q) \Rightarrow non(P)$ », est vraie, car ces propositions sont équivalentes.
On parle de **raisonnement par contraposée.**

On utilise en général le raisonnement par contraposée quand P ou Q contiennent des négations (la négation d'une négation annule la négation), ou quand Q est difficile à obtenir à partir de P.

EXEMPLE 55 — *Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair.*
Cette proposition s'écrit « $\forall n \in \mathbb{Z}$, (n^2 pair $\Rightarrow$ n pair) ».
***Preuve** — Soit $n \in \mathbb{Z}$.*
Procédons par contraposée. Nous allons démontrer que n impair $\Rightarrow n^2$ impair ».
Supposons que n est impair.
Ainsi, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 2k + 1$. On a donc $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.
Comme $2k^2 + 2k \in \mathbb{Z}$, n^2 est de la forme $2r + 1$ avec $r \in \mathbb{Z}$, donc n^2 est impair. □

3.10 Raisonnement par l'absurde

On souhaite démontrer qu'une proposition P est vraie. Le **raisonnement par l'absurde** consiste à supposer que P est fausse, c'est-à-dire à supposer que $non(P)$ est vraie et montrer que cela conduit à une contradiction. On en déduit alors que P est vraie.
Le raisonnement par l'absurde est analogue à la contraposée. On l'utilise en général lorsque la **proposition** P **contient une négation** (irrationnel, discontinue, diverge, pas dérivable,...).

EXEMPLE 56 — *Démontrons que $\sqrt{2}$ est un **nombre irrationnel**[1]*
***Preuve** — Supposons, par l'absurde, que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel. Alors il existe deux entiers $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, **premiers entre eux**[2], tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.*

On a donc $2q^2 = p^2$. On en déduit que p^2 est pair. Or, nous avons vu à l'exemple 55 que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, si n^2 est pair alors n est pair. Donc p est pair. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 2k$. On a donc $p^2 = 4k^2$, puis $2q^2 = 4k^2$. Donc finalement, $q^2 = 2k^2$. On en déduit que q^2 est pair. Donc, comme précédemment, q est pair.

*On en déduit que 2 **divise** p et 2 divise q. Ceci est **absurde** car cela contredit le fait que p et q sont premiers entre eux.*

Donc $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. □

1. L'ensemble des nombres irrationnels est $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: ce sont les nombres réels qui ne sont pas des nombres rationnels
2. Si un entier naturel d divise p et divise q alors $d = 1$. Cela revient à dire que p et q n'ont aucun diviseur premier en commun.

3.11 Raisonnement par analyse-synthèse

Des raisonnements comme la récurrence, la double-inclusion, la double-implication, ont tous besoin d'un élément essentiel : le résultat à démontrer.
Si l'on ne connaît pas l'hypothèse de récurrence $HR(n)$, on ne peut pas raisonner par récurrence.

Lorsque l'on demande de résoudre, calculer, ou simplifier, on ne connaît pas à l'avance le résultat que l'on doit obtenir. Il faut donc non seulement construire une preuve, mais aussi arriver à deviner (au cours de la preuve) le résultat que l'on doit obtenir. Il y a en réalité deux questions en une.

Le raisonnement par **analyse-synthèse** aide à séparer ces questions, dans le cas des résolutions, c'est-à-dire les situation où l'on veut déterminer tous les $x \in E$ tels que $P(x)$ est vraie.

Ce raisonnement s'effectue en deux étapes :

1. ***Analyse*** : On suppose que l'on a un élément x tel que $P(x)$ est vraie, et on cherche des propriétés vérifiées par cette solution x.
2. ***Synthèse*** : Parmi les éléments x vérifiant les propriétés obtenues dans l'analyse, on détermine ceux qui sont bien solutions (si $P(x)$ est bien vraie pour ces éléments-là).

On obtient ainsi l'ensemble des solutions du problème.

Ce raisonnement est particulièrement utile pour démontrer l'**existence** et l'**unicité** d'une solution à un problème.
Cependant, c'est le raisonnement le plus difficile à utiliser car c'est le plus élaboré (il faut trouver les bonnes propriétés lors de la phase d'analyse pour pouvoir conclure avec la synthèse).
Pour un raisonnement par l'absurde, par contraposée, par récurrence, on sait ce que l'on doit obtenir (on connaît le "résultat" auquel on doit aboutir), alors que pour une analyse-synthèse on ne sait pas ce que l'on doit obtenir.

EXEMPLE 57 — *Déterminons l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,*

$$f(y - f(x)) = 2 - x - y.$$

Preuve — *Raisonnons par analyse-synthèse.*

• ***Analyse*** *: Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(y - f(x)) = 2 - x - y$.*
Soit $x \in \mathbb{R}$. Prenons $y = f(x) \in \mathbb{R}$. Alors $f(0) = 2 - x - f(x)$. Donc $f(x) = 2 - f(0) - x$.
Donc f est de la forme $f(x) = a - x$ où $a \in \mathbb{R}$.

• ***Synthèse*** *: Déterminons parmi les fonctions de la forme $x \longmapsto a - x$ celles qui vérifient la condition de l'énoncé.*
Soient $a \in \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto a - x$. On a

$$f(y - f(x)) = f(y - (a - x)) = f(y + x - a) = a - (y + x - a) = 2a - x - y.$$

Donc f vérifie la condition de l'énoncé si et seulement si $2a = 2$, si et seulement si $a = 1$.
Ainsi, il existe une unique fonction vérifiant la condition de l'énoncé. C'est la fonction $x \longmapsto 1 - x$. □